

Metodología de la investigación avanzada: Introducción al estudio de los sistemas complejos y sus aplicaciones Parte III: Dinámicas complejas

Pablo Argibay

The elegant body of mathematical theory pertaining to linear systems, and its successful application to many fundamentally linear problems in the physical sciences, tends to dominate even moderately advanced University courses in mathematics and theoretical physics. The mathematical intuition so developed ill equips the student to confront the bizarre behavior exhibited by the simplest of discrete nonlinear systems... Yet such nonlinear systems are surely the rule, not the exception, outside the physical sciences.

Robert M. May¹

INTRODUCCIÓN

Es verdad que en medicina muchas veces tendemos a ver una imagen estática de la realidad, una foto del problema en un momento determinado, en general sin tener en cuenta el “antes”. Y, lo que es peor, intentando predecir el “después”, a partir de esa incompleta “visión-foto”. Lo cierto es que la práctica de la medicina en cualquier nivel y en cualquier especialidad conlleva si no explícitamente, al menos implícitamente, una visión dinámica de carácter “visión-película”. Hablamos de “la evolución del paciente”, “la supervivencia a lo largo de determinado periodo”, “la evolución del estado inflamatorio o de la infección del paciente”, “la evolución de la mortalidad infantil en determinada región”, “la evolución en la respuesta a un tratamiento farmacológico”, “la evolución en la expresión de determinado gen o determinada proteína a lo largo del tiempo”, “la trayectoria en el autismo”, etc. Deliberadamente y por el uso he introducido el término “evolución” en casi todas las proposiciones. Término que si bien está lejos del uso biológico (Darwin y después), nos da sí una idea de cambio. Es decir, en medicina como en

otras disciplinas nos interesa el cambio y para estudiarlo los científicos han creado una ciencia, la “dinámica”, y a los sistemas (como el ser humano), que cambian con el tiempo, los han denominado “sistemas dinámicos”. Ya hemos visto en la parte I de esta serie de artículos, que los sistemas dinámicos pueden ser lineales o no lineales, y que –si bien es cómoda– la “linealidad” se encuentra presente en varios sistemas y permite hacer buenas predicciones acerca de la evolución de un sistema; la “no linealidad”, en cambio, parece ser la norma en los fenómenos de la naturaleza. Más aún, vimos que parecería que la naturaleza ha “elegido” nutrirse de sistemas no lineales y además complejos. Para no quedarse atrás, el ser humano ha inventado (ya dijimos que a nuestro cerebro izquierdo le encanta inventar teorías), un cuerpo de ideas que con pretensión de teoría podemos agrupar con el término “Teoría de sistemas dinámicos complejos” y podemos definir como: la descripción de la evolución de sistemas que a nivel macroscópico exhiben una conducta (emergente), resultante de la interacción de varios componentes. Podríamos decir que, cuando en un sistema hay competición entre sus elementos, cooperación, anulación o potenciación, entre otras interacciones, a nivel macroscópico emergerán conductas denominadas complejas. Claro, el ejemplo más acabado de un sistema de nodos y conexiones complejas, que evoluciona en el tiempo, con componentes que interaccionan entre ellos y con el ambiente, que se adapta y que aprende, y que además da lugar a la emergencia de una notable característica (la conciencia), es el cerebro.² Sin embargo, me animaría a decir que prácticamente todos los sistemas que nos interesan en el ser humano presentan características de sistemas dinámicos no lineales y complejos. Pensemos en la dinámica inflamatoria de un paciente internado

¹ Robert M. May. “Simple mathematical models with very complicated dynamics”. Nature 1976; 261: 459-467.

² O. Sporns. “Networks of the Brain”. MIT Press, 2010.

en terapia intensiva: de la interacción inicial de varios componentes proinflamatorios aparece una manifestación macroscópica que denominamos “síndrome de respuesta inflamatoria sistémica” (SIRS);³ esta respuesta *per se* es de lo más ambigua y más aún presenta una dinámica sumamente compleja con evoluciones diversas. Por ejemplo:⁴

- Persiste y mata al paciente.
- Se agota y tal vez el paciente no muera.
- Da lugar a una contrarrespuesta antiinflamatoria sistémica (CARS), tan compleja en su dinámica como la anterior.
- CARS puede desactivar completamente la respuesta inflamatoria.
- CARS puede ir demasiado lejos y ablacionar momentáneamente el sistema inmunitario.

Lo anterior, sin tener en cuenta que además el equipo médico está interviniendo sobre la dinámica y es una variable más del sistema. Pero más aún, para complejizar la cosa aparece una interacción de otro tipo: MARS (de *mixed antagonist response syndrome*), una respuesta mixta de cuya evolución hacia uno u otro estado inflamatorio dependerá la supervivencia del paciente.⁵

Independientemente de la sobresimplificación del ejemplo anterior (seguramente los médicos de terapia intensiva podrán refinarlo), es indudable que la respuesta inflamatoria de un paciente es un excelente ejemplo de sistema de partes (componentes del sistema inmunitario, entre otros), que interaccionan en forma no lineal, que interaccionan con el ambiente, que intenta dar una respuesta adaptativa y que da lugar macroscópicamente (clínicamente), a la emergencia de respuestas diversas y no predecibles. Esto viene a colación de lo que intentaremos describir en el presente artículo y en el próximo: veremos que hay sistemas a los que eventualmente conocemos poco de sus componentes, de los cuales conocemos menos sus interacciones, que son potencialmente deterministas y que, sin embargo, no son predecibles con seguridad. Existen modelos matemáticos, por otra parte, que ayudarían a comprender estos fenómenos dinámicos no lineales y eventualmente complejos.

El ejemplo dado SIRS-CARS no es obviamente el único caso de estas dinámicas complejas. La diferente diná-

mica tumoral en pacientes que aparentemente parten de las mismas condiciones; las epidemias; el crecimiento bacteriano; el aprendizaje de cualquier habilidad y las diferencias en lo aprendido a pesar de las supuestas iguales condiciones de los que aprenden; la resistencia o caída frente al estrés y tantos etcéteras que evidencian que hace falta un giro copernicano en nuestra concepción habitual y estática (la foto) del mundo hacia una concepción dinámica (la película), y a menudo no lineal y compleja de los patrones de comportamiento (la geometría de la cuestión).

UNA MANERA GEOMÉTRICA DE PENSAR

Decíamos que la “dinámica” se ocupa de los sistemas que evolucionan. El inventor y monarca absoluto de la “dinámica” durante más de 200 años fue nada menos que Isaac Newton (1642-1727), inventor en relación con lo que nos ocupa, de las denominadas ecuaciones diferenciales. Newton resolvió elegantemente el denominado problema de los “dos cuerpos”, es decir, el problema de predecir y calcular el movimiento de dos cuerpos que interaccionan tales como la Tierra y el Sol. Embravecido con este descubrimiento, un par de generaciones arremetió con el problema de los “tres cuerpos”, ¡sí, claro!, el problema de predecir y calcular el movimiento de tres cuerpos que interaccionan tales como la Tierra, el Sol y la Luna. La cuestión fue bastante decepcionante ya que parecía ser imposible de resolver, a tal punto que se dice que, en honor al rey de Suecia, se ofreció en 1887 un premio de 2500 coronas al matemático que pudiera resolver el problema de la interacción de varios cuerpos. Henri Poincaré (1854-1912) no lo resolvió, aunque se acercó bastante, y al igual que Newton fue el inventor de una nueva herramienta matemática, la topología algebraica, una forma de geometría. Poincaré prefirió mirar las consecuencias geométricas del problema de “varios cuerpos”, es decir, mirar el patrón que se forma por la interacción y evolución del sistema, una aproximación si se quiere cualitativa por sobre la cuantitativa. Pero Poincaré hizo más por el campo de la dinámica: fue capaz de vislumbrar que existían sistemas, los cuales a pesar de ser deterministas podrían exhibir conductas erráticas, dependiendo en forma muy sensible de las condiciones iniciales⁶ de donde partía el sistema.

³ H. Herwald y A. Egesten. “Sepsis-Pro-Inflammatory and Anti-Inflammatory Responses: Good, Bad or Ugly?”. Karger, 2011.

⁴ Véase: Clin Chest Med. 2008 Dec;29(4):617-25 e Intensive Care Med. 2003 Nov;29(11):2068-71.

⁵ Alexander R. Novotnya, Daniel Reima, Volker Assfalga, Felicitas Altmayra, Helmut M. Friess, Klaus Emmanuelb, Bernhard Holzmann. “Mixed antagonist response and sepsis severity-dependent dysbalance of pro- and anti-inflammatory responses at the onset of postoperative sepsis”. Immunobiology 2012; 217:616- 621.

⁶ “Si conociéramos exactamente las leyes de la naturaleza y la situación exacta del universo en el momento inicial, podríamos predecir exactamente la situación de ese universo en un momento dado. Pero, aun si conociéramos sin secreto alguno las leyes de la naturaleza, solo conoceríamos aproximadamente la situación inicial del universo. Podríamos predecir entonces, aproximadamente, la situación en el momento dado, y diríamos que podríamos predecir ese sistema gobernado por leyes. Pero, no siempre es así, puede suceder que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan grandes diferencias en el fenómeno final. Un pequeño error en las condiciones iniciales produciría un enorme error en la predicción final. Las predicciones serían imposibles...”. Traducido y adaptado de M. Mitchell “Complexity: A Guided Tour”. Oxford University Press, 2011.

¿Suenan conocidos? Sí, claro, cuántas veces en medicina nos asombramos de lo divergente que puede ser la evolución de pacientes que, aparentemente, “arrancaban” de igual manera su enfermedad y, sin embargo, su evolución era totalmente divergente.

Pero el “método geométrico” de Poincaré comenzó a tener sentido visual e intuitivo con el desarrollo de las computadoras de alta velocidad.

En 1963, Edward Lorenz (1917-2008) descubre un “atractor extraño”⁷⁷ en la solución de sus ecuaciones estudiando variables atmosféricas, esa famosa mariposa (Fig. 1) que ha animado la imaginación popular y la frase tan poética e ilustrativa como arrancada de los pelos “una mariposa bate las alas y en otro rincón del mundo se desata un tifón”. En realidad, lo que Lorenz descubrió es que la solución a sus ecuaciones nunca se estabilizaba en un punto de equilibrio o en un estado periódico y en lugar de esto continuaba oscilando en forma irregular y aperiódica. Tal como lo sugirió Poincaré, si Lorenz iniciaba sus simulaciones en condiciones iniciales similares, al poco tiempo las conductas resultantes resultaban totalmente diferentes. A pesar de la imagen de “caos” que lo anterior parecería implicar, Lorenz nos deja algo muy interesante: la solución a sus ecuaciones tenía una estructura. Cuando eran graficadas en tres dimensiones, el conjunto de puntos adquiría la forma de la famosa mariposa (véase Fig. 1). Nunca la frase “una imagen vale más que mil palabras” ilustró tan bien esta nueva forma de pensar geométrica, cualitativa y basada en patrones.

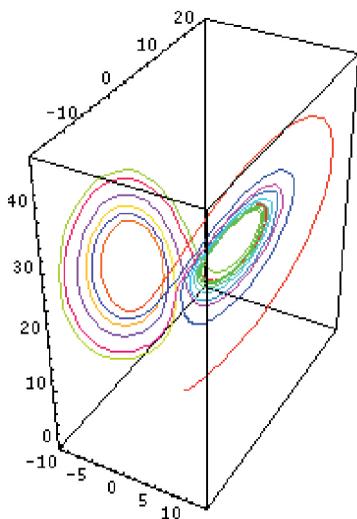


Figura 1. Imagen en “mariposa” del gráfico en tres dimensiones de variables meteorológicas, conocido como “atractor de Lorenz”. Tomado de: <http://www.wcu.edu/ceap/houghton/EDELCompEduc/Ch4/ch4overview.html>

CRECIMIENTO LINEAL Y NO LINEAL

Crecimiento sin límite (el modelo lineal)

Supongamos que queremos “modelar” el crecimiento de una colonia de bacterias que se inicia con una bacteria que se duplica, repitiéndose para cada hija esta situación en cada ciclo. El modelo de división binaria es bastante simple y se puede representar como una curva de crecimiento exponencial: $y = 2^x$, donde y es la población y X es el tiempo para un tiempo $X_0 = 1$. En la figura 2 vemos el gráfico de crecimiento de la población de bacterias en función del tiempo para $f(x) = 2^x$.

Vemos que el crecimiento es exponencial y que podría permanecer sin límites (resistencia a los antibióticos mediante), indefinidamente. Por otra parte, si graficamos la población futura (y), en función de la población actual (x), vemos una función lineal (Fig. 3).

Sin embargo, en la vida real, si bien el crecimiento de las bacterias es rápido, existen limitantes como la cantidad de alimento, la competencia con otras bacterias, el sistema inmunitario si están en un organismo, etc. Una manera de modelar esta y otras situaciones en las que existe un

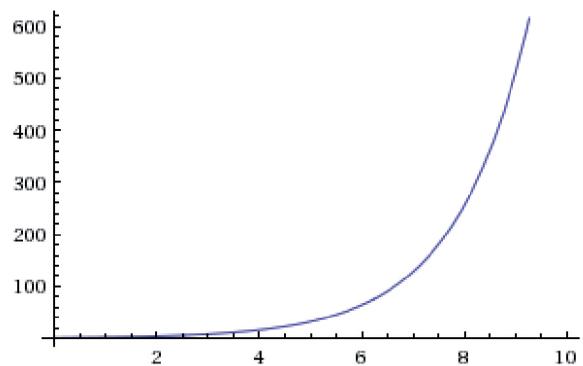


Figura 2. Gráfico de la población de bacterias en función del tiempo para una función $f(x) = 2^x$.

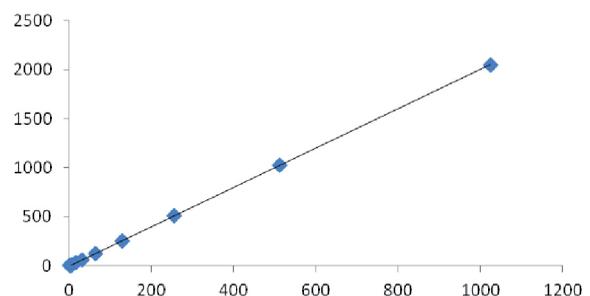


Figura 3. Gráfico de la población futura (y), en función de la población actual (x), en la simulación de un crecimiento binario sin límites.

límite al crecimiento es la introducción en la ecuación de un “factor limitante” que actuaría de la siguiente manera: tendiendo a un aumento de la población de un ciclo al otro cuando esa población es pequeña y a disminuir cuando es grande. Si graficamos la población futura (y) (es decir X_{t+1}), en función de la población actual (x) (es decir X_t), tendremos un modelo como el de la figura 4.

Como vemos, este modelo parecería reproducir más fielmente lo que ocurre con el crecimiento de una colonia bacteriana en un ser humano, sometida esta colonia a diversas restricciones. Decimos de este modelo:

1. Es no lineal.
2. $F(0) = 0$.
3. $F(x)$ aumenta monótonicamente⁷ a medida que X aumenta en un rango $0 < X < A$ ($F(x)$ max con $X = A$).
4. $F(x)$ decrece monótonicamente cuando $X > A$.

En general, $F(x)$ contiene parámetros de regulación que atenúan la no linealidad de la conducta observada. Estos parámetros tienen cierta interpretación biológica (p. ej., Competidor).

La ecuación descripta (la desarrollaremos más adelante), puede ser escrita como: $X_{t+1} = aX_t(1 - X_t)$ Ecuación 1
Donde: X_{t+1} es la población a tiempo futuro; X_t es la población en un momento dado y a es un parámetro de ajuste. Una de las restricciones de este modelo es que X debe mantenerse dentro del rango $0 < X < 1$ (proponemos al lector experimentar con una planilla Excel y ver qué

ocurre cuando $X > 1$). Por otra parte el parámetro “ a ” debe mantenerse en $1 < a < 4$ (experimentar también con esto).

Crecimiento de poblaciones (el modelo logístico)

Como decíamos, el crecimiento exponencial (véanse Figs. 2 y 3) no es realista ya que presupone un crecimiento sin límites de ningún tipo. Parecería mucho más “natural” presentar un modelo como el de la figura 4, donde el crecimiento modelado de la colonia bacteriana tenga límites. Para simular estos efectos niveladores correspondientes, de acuerdo con la disciplina en estudio, a sobrecrecimiento, depredación, déficit de nutrientes, freno del sistema inmunitario, etc., se ha propuesto un modelo de “tasa de crecimiento *per capita*”, en el cual esta tasa decrece cuando la población es lo suficientemente grande y por otro lado presenta altas tasas cuando la población es lo suficientemente pequeña. En la figura 5 se ha modelado la tasa de crecimiento (r), en función del aumento de la población N .

Se introduce en esta figura una nueva variable: cuando la población llega a cierto tamaño, se invierte el crecimiento y r es negativa (la tasa de mortalidad o desaparición supera a la de nacimiento o aparición). El punto de inflexión se denomina “capacidad de carga” (*carrying capacity*)⁸, y está representado en la figura 5 por K . Una forma de representarnos esto es pensar en términos de un descenso lineal de r a medida que aumenta N . Todo esto nos lleva

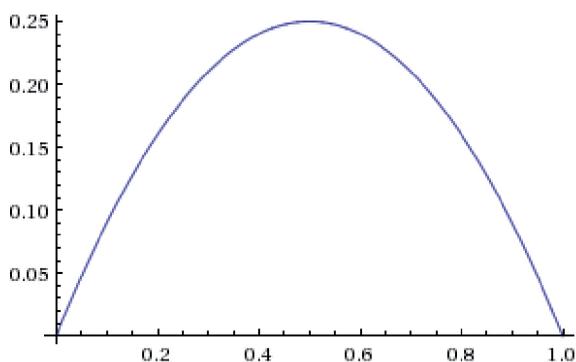


Figura 4. Gráfico del crecimiento de una población que contiene un factor autolimitante.

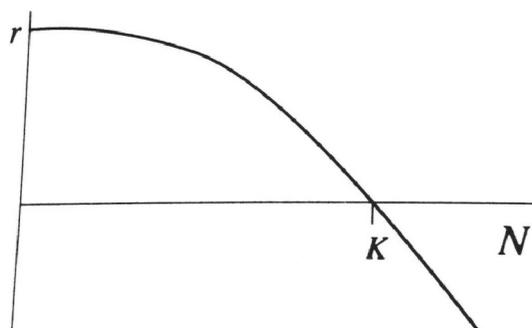


Figura 5. Tasa de crecimiento (r) en una población (N) con crecimiento excesivo. El punto de inflexión K indica la capacidad de carga en el momento que la tasa se hace negativa.

⁷ Véase: http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_mon%C3%B3tona

⁸ El concepto de *carrying capacity* ha sido interpretado de diversas maneras como “equilibrio de población” o clásicamente como el “número de individuos de una determinada especie que un determinado ambiente puede albergar o soportar sin ser permanentemente alterado”, en sus recursos, su equilibrio, etc. Véase: Ecological Modelling 2006;192: 317-320. Sin embargo, lo anterior en general deja un cierto sesgo ecológico y creo que para adaptarlo a nuestro interés biológico-médico podríamos dejarlo como “la máxima capacidad que una variable puede alcanzar en determinada situación”; aplica esto tanto a una bacteria en cualquier ambiente, como al caso anteriormente mencionado del SIRS y una variable representando a una citoquina, la cual alcanzará un nivel máximo antes de ser depurada. En este sentido, el ser humano es un “ambiente”.

a la ecuación 1 (ecuación logística), la cual en su forma de ecuación diferencial quedaría como:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Esto significa que la variación de la población en el tiempo es directamente proporcional a la tasa de crecimiento r , al tamaño de la población en un momento dado y a un factor limitante resultante de restar a la unidad, el tamaño poblacional sobre su capacidad de carga (*carrying capacity*) (Fig. 6).

Si graficáramos la población N en función del tiempo t , tendríamos la figura 7, en la cual podemos observar que para $N_0 < K/2$, el crecimiento de la población en función del tiempo tiene una forma de S sigmoidea. Dejamos al lector interpretar que pasará en las siguientes situaciones iniciales: $K/2 < N_0 < K$; cuando $N_0 > K$, cuando $N_0 = 0$; o finalmente cuando $N_0 = K$.

Es obvio que el modelo no debe tomarse más que como lo que es: un modelo no lineal que representa algunos fenómenos biológicos de crecimiento. Sin embargo, la validez del crecimiento sigmoideo de varios organismos simples está más que evidenciada; se complica la cosa

en organismos más complejos y no se ha modelado demasiado adecuándolo a situaciones en que se trabaja con concentración creciente o decreciente de variables relacionadas con situaciones médicas (es una buena ocasión). Simplemente quisimos ejemplificar la modelización de un sistema simple y no lineal.

Modelos simples y diferentes dinámicas asociadas

Una manera simple de simular situaciones a través de la ecuación logística ha sido la confección de los denominados mapas iterativos logísticos, en los cuales las variables para representar son:

- La unificación de la tasa de nacimiento o producción de determinada variable, con la de mortalidad, desaparición o aclaramiento de otra; es decir, combinar en una variable las variables que indican producción con las que indican desaparición. Dicha variable se ha denominado convencionalmente R (con conductas interesantes para $0 < R \leq 4$; dejamos investigar esta limitación).
- El tamaño relativo de la población, expresado como fracción de la máxima capacidad de carga (= 1), mencionada anteriormente. Este tamaño relativo se ha denominado convencionalmente x (con valores $0 > x < 1$). Es decir, $x = 1$ indicaría la máxima portabilidad por alcanzar, la cual no sería compatible ambientalmente.

El mapa logístico quedaría de la siguiente manera:

$$x_{t+1} = R x_t (1 - x_t)$$

Donde:

x_{t+1} representaría la población futura en función de la población actual x_t y R .

Al inicio de las simulaciones, $t = 0$ y x , como decíamos, debe ser mayor que 0 (población inexistente) y menor que 1 (población incompatible con el ambiente).

El algoritmo para representar el mapa logístico sería el siguiente:

1. Introducir población de inicio ($0 > x < 1$):
2. Introducir R ($0 > R \leq 4$):
3. Introducir número de ciclos de iteración ($n > 1$):
4. Calcular x_{t+1}
5. Hacer $x = x_{t+1}$
6. Ir a 4
7. Repetir n veces
8. Graficar

Dicho algoritmo se puede poner en práctica con una simple calculadora; sin embargo, sería adecuado utilizar las capacidades de un programa de computadora. En nuestro laboratorio, los ingenieros Javier Cuneo y Nicolás Quiroz han implementado un programita en MatLab que nos permite ensayar diferentes variaciones de variables y experimentar geoméricamente los resultados. Dejamos al lector como tarea el diseño de una hoja de cálculo en Excel que haga posible representar el algoritmo en cuestión.

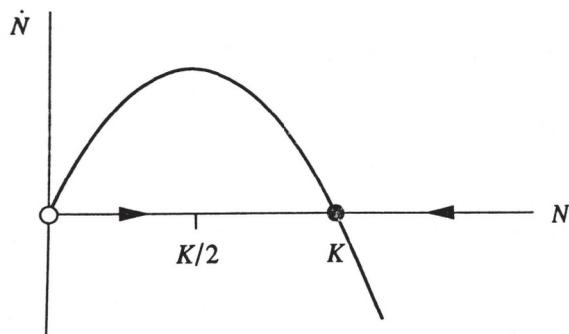


Figura 6. Modelo de variación de la población en el tiempo

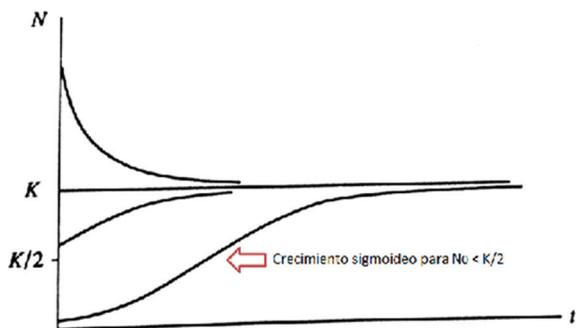


Figura 7. Modelo de crecimiento de la población en función del tiempo

Empecemos con algunos experimentos que nos permitirán ir sacando conclusiones acerca del comportamiento de los mapas logísticos.

Utilizaremos inicialmente un $R = 2$ para diferentes valores de x_0 y 20 ciclos. La figura 8 grafica el comportamiento de este mapa logístico.

Como podemos observar una población de inicio baja lleva rápidamente al crecimiento en los ciclos subsiguientes hasta lograr un equilibrio en un 50% de la capacidad del sistema.

Podríamos decir que la población se ha estabilizado en dicho valor, que tiende a dicho valor o que es “atraída” a dicho valor. En la figura 9 vemos que, partiendo de dos poblaciones iniciales diferentes, luego de pocos ciclos, ambas poblaciones se estabilizan en el mismo valor, es decir, siguen siendo “atraídas” hacia dicho valor.

Intentemos con otro experimento partiendo de dos poblaciones diferentes, una inicialmente baja ($x_0 = 0.2$) y otra inicialmente alta ($x_0 = 0.8$) (Fig. 10). Sorprendentemente,

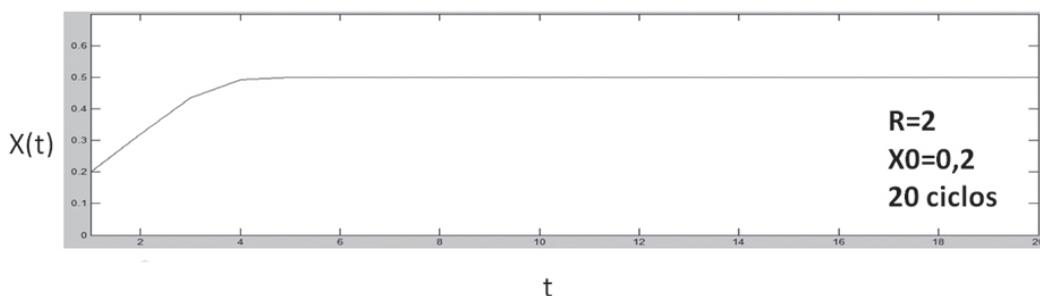


Figura 8. Crecimiento de una población de inicio baja, que logra estabilizarse al alcanzar el 50% de la capacidad del sistema.



Figura 9. Estabilización del crecimiento de dos poblaciones inicialmente bajas.

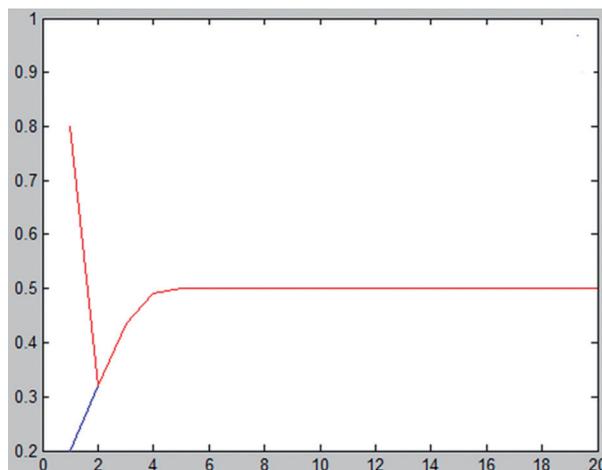


Figura 10. Estabilización del crecimiento de dos poblaciones de inicio diferente (una alta y la otra baja)

ambas poblaciones, a pesar de sus inicios diferentes, convergen al mismo valor de un 50% ($x_t = 0.5$) de su capacidad máxima. Dejamos al lector la confección de otros experimentos; sin embargo, podemos intentar una conclusión: a pesar de la divergencia en los tamaños poblacionales de inicio (x_0), si la tasa de “aparición/desaparición” (R) se mantiene constante, las poblaciones tienden a converger y estabilizarse. El comportamiento tiende a tener una aire de parecido con lo que ocurre con algunas perturbaciones de interés biomédico. A pesar de una perturbación que cambie las condiciones de inicio de un sistema, si este responde a un R constante (ya veremos que dentro de ciertos valores), el sistema se estabiliza. Por ahora podríamos decir que el sistema es determinista (está determinado por el mapa logístico) y está “atraído” hacia un valor puntual.

Hasta ahora vemos que nuestras nociones habituales de linealidad y de predicción de linealidad se ven cuestionadas en los modelos propuestos. Pero sigamos experimentando: partamos ahora de poblaciones inicialmente similares ($x_0 = 0.2$ e $y_0 = 0.3$), pero que comparten un R diferente del anterior ($R = 3$); representemos, además, lo que ocurre a largo plazo, por ejemplo 100 ciclos (Fig. 11).

En este caso también las poblaciones se estabilizan, pero ahora lo hacen en forma de oscilaciones, bifurcaciones, alrededor de un valor máximo y mínimo (Mx y Mn). Sigamos ahora con poblaciones inicialmente muy divergentes, pero con el mismo $R = 3$.

Al igual que en el caso anterior, las poblaciones inicialmente divergentes convergen hacia una oscilación. El anexo 12b ilustra más gráficamente aún el patrón cuando las poblaciones son sometidas a 1000 ciclos de iteración (Fig. 12). Por el momento podemos concluir que: dentro de cierto rango de R (R cercano a 3 por ahora), poblaciones inicialmente divergentes convergen o son “atraídas” hacia oscilaciones periódicas y constantes. La interpretación biomédica sería que, a pesar de perturbaciones en una variable que cambien notoriamente las condiciones iniciales de esta variable, si la tasa de aparición/desaparición (R) de esa variable se mantiene constante cercana a 3, la variable convergerá a un estado de máximos y mínimos periódicos. Si se me permite ir más lejos con una metáfora humana, podríamos decir que el mismo paciente que tiene una tasa de producción/aclaramiento con una variable ($R = 3$), evolucionará hacia valores constantes y bifásicos de esa variable, a pesar de que las condiciones

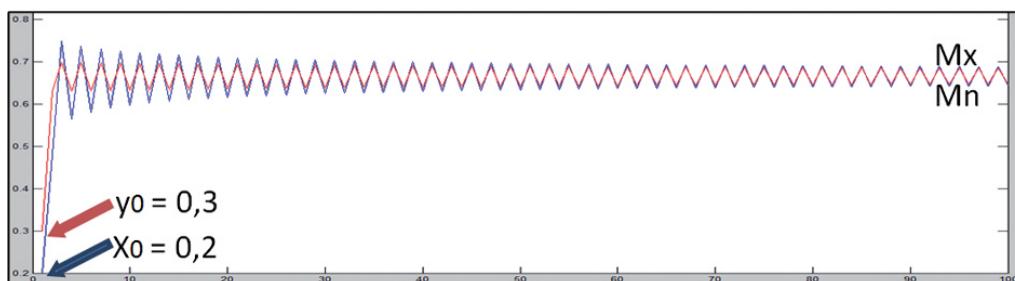


Figura 11. Crecimiento a largo plazo (100 ciclos) de dos poblaciones de inicio similar

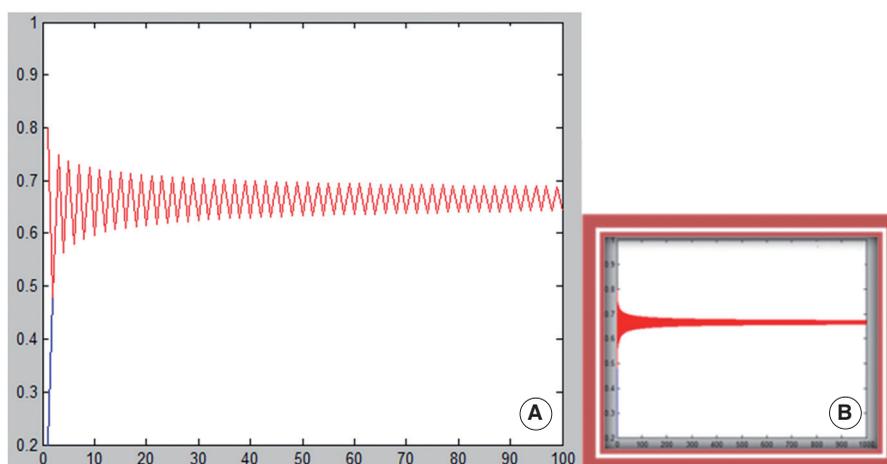


Figura 12. Crecimiento de dos poblaciones de inicio diferente a muy largo plazo (1000 ciclos)

iniciales de su variable sean muy diferentes. Si bien es una metáfora o si se quiere un modelo, lo que podemos decir es que de seguir una variable biológica un patrón dinámico compatible con un mapa logístico, las condiciones finales de esa variable estarán influidas mayormente por su tasa de producción/aclareamiento (R), independientemente de sus condiciones iniciales. Hasta ahora vimos que, a pesar de determinada condición inicial, nuestra variable evolucionará al menos con dos conductas: una convergencia a un solo valor estable ($R \approx 2$), o una convergencia hacia una oscilación ($R \approx 3$). Lo que seguro no parece darse es una predicción de crecimiento lineal o decrecimiento lineal a partir de las condiciones iniciales del sistema. Nuestra manera lineal de pensar está en apuros.

Experimentemos una condición más: valores de inicio divergentes (0.2 y 0.8), con $R = 3.5$ (Fig. 13).

Vemos que los valores convergen, pero ahora hacia cuatro valores, un máximo, un mínimo y dos intermedios. Lo primero que se nos ocurre en nuestra metáfora biológica es que cada vez se hace más difícil predecir dónde están los valores de la variable si no conocemos precisamente el ciclo en el que “tomamos” la muestra. Metafóricamente hablando, deberíamos conocer la situación inicial, pero aun así, si no conociéramos el ciclo en el cual se hace el muestreo, existen al menos cuatro valores potenciales correspondientes a ese ciclo, independientemente de los valores iniciales del

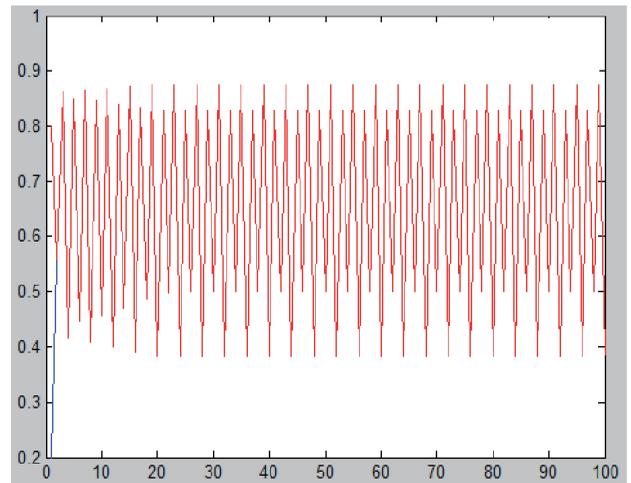


Figura 13. Crecimiento a largo plazo de dos poblaciones de inicio divergentes con convergencia hacia cuatro valores (máximo, mínimo y dos intermedios).

sistema. Por otra parte, estamos hablando de la dinámica de un sistema ¡de un solo componente!

En la próxima entrega llevaremos nuestras condiciones experimentales a situaciones más extremas e interesantes y veremos las dinámicas del caos determinista.

BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA

- Argibay P. Metodología de la investigación avanzada: introducción al estudio de los sistemas complejos y sus aplicaciones. Rev. Hosp. Ital. B.Aires. 2012;32(1):45-7.
- May RM. Simple mathematical models with very complicated dynamics. Nature. 1976;261(5550):459-67.
- Sametband MJ. Entre el orden y el caos: la complejidad. México: Fondo de Cultura Económica; 1994.
- Strogatz SH. Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering. Cambridge, MA: Perseus Books; 1994.